

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра высшей математики и математической физики
Направление «Физика»



Высокочастотная дифракция на контуре с негладкой кривизной

Выпускная квалификационная работа студента

Злобиной Екатерины Андреевны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. **Киселев Алексей Прохорович**

Рецензент:
д.ф.-м.н., проф. **Бабич Василий Михайлович**

Санкт-Петербург
2018

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Постановка задачи | 4 |
| 3 | Постановка задачи в пограничном слое | 7 |
| 3.1 | Используемые системы координат | 7 |
| 3.2 | Падающая волна в координатах N и S | 8 |
| 3.3 | Разложение оператора Гельмгольца в ряд по степеням большого параметра | 9 |
| 3.4 | Постановка задачи в координатах N и S | 9 |
| 4 | Построение u_1^{sh} | 10 |
| 4.1 | Построение w | 11 |
| 4.2 | Построение v | 11 |
| 4.2.1 | Случай, когда полюс и критическая точка фазы далеки | 12 |
| 4.2.2 | Сшивки вне переходной зоны | 13 |
| 4.2.3 | Случай, когда полюс и критическая точка фазы близки | 14 |
| 4.3 | Поле в переходной зоне | 15 |
| 4.4 | Сшивка в переходной зоне | 17 |
| 5 | Заключение | 17 |
| | Приложение А | 18 |
| | Список литературы | 19 |

1 Введение

Структура высокочастотных полей в дифракционных задачах описывается геометрической теорией дифракции (ГТД), впервые отчетливо сформулированной Келлером [1]. Вклад в поле дают лучи, геометрооптически отраженные от гладких частей границы и дифрагированные точками ее негладкости. В продвинутых версиях ГТД (например, [2]) рассматриваются поля в переходных зонах (в частности, в полутени), где фазы отраженных и дифрагированных волн сближаются и эти волны теряют индивидуальность. Там поля описываются спецфункциями, удовлетворяющими параболическому уравнению: интеграл Френеля в полутени клина, интегралы Фока в полутени гладкого выпуклого тела [3], [4], [5], функция параболического цилиндра со знаком $-3/2$ в полутени конуса [6].

Поля дифрагированных волн Келлер предлагал брать из эталонных задач, допускающих разделение переменных. Задача о дифракции на разрыве кривизны давно привлекала внимание исследователей не только возможными приложениями, но и тем, что эталонной задачи для нее нет. До сих пор исследования этой задачи основывались, в сущности, на методе Кирхгофа [2]. Суть его заключается в применении формулы Грина, где в качестве значения поля на контуре берется геометрооптическое значение полного поля.

Дифракция волны, распространяющейся вдоль плоской границы (с условием Неймана), переходящей в параболу в ее вершине, где кривизна испытывает скачок, впервые была рассмотрена А.В. Поповым [7]. Позже задачи с касательным падением исследовали Н.Я. и А.С. Кирпичниковы и В.Б. Филиппов [8], [9], [10], [11], которые использовали специфический вариант метода Кирхгофа. Они изучали дифракцию волны соскальзывания и волн шепчущей галереи на изогнутой границе, имеющей скачок кривизны, для граничных условий Дирихле и Неймана. Этот анализ был обобщен ими на случай упругой среды [11]. В работе Каминецкого и Келлера [12] исследована дифракция в случае некасательного падения волны на криволинейную границу с изолированной точкой, в которой имеет скачок кривизна или даже ее производная некоторого порядка. Используя один из вариантов метода Кирхгофа, они получили выражения для дифрагированной волны; однако, было опущено обсуждение волнового поля в непосредственной близости направления отражения. Нестационарный подход к этой проблеме, родственному методу Кирхгофа, разработал (для идеальных граничных условий) А.Ф. Филиппов [13]. А.П. Киселев и З.М. Рогофф в [14] с помощью метода Кирхгофа исследовали влияние импеданса на дифракцию цилиндрической волны (на контуре со скачком кривизны), интересуясь полем в переходной области.

В настоящей работе к задаче о разрыве кривизны впервые применяется последовательный метод пограничного слоя. Под методом пограничного слоя понимают технику, основанную на локальном изучении исходной задачи в некоторой малой (или тонкой) области, окружающей особенность решения, обычно с применением

растянутых переменных. Затем это погранслоное решение сшивается (говорят еще: сращивается) с решением вне окрестности особенности. Полезность техники пограничного слоя в высокочастотных задачах теории дифракции впервые, по-видимому, отмечена в [15]. Единообразное систематическое изложение большого числа примеров дали Бабич и Кирпичникова [16]. В частности, в общую схему включен метод параболического уравнения, восходящий к [3], [4].

В нашей задаче естественно выделяются два пограничных слоя. Один окружает точку разрыва кривизны границы (здесь естественно растяжение декартовых координат в k раз и разложение кривизны в ряд), другой окружает геометрически отраженный луч, и в нем естественным является метод параболического уравнения.

Цель настоящей работы – построение (в главном порядке) формул для волны, дифрагированной точкой разрыва кривизны, и для поля в переходной области. Рассматривается некасательное падение плоской волны и некасательные направления наблюдения. Найденное выражение для дифрагированной волны согласуется с полученным в работах [7], [12]. Найденное выражение для поля в переходной области содержит функцию параболического цилиндра со значком -3 , не встречавшуюся ранее при решении задач дифракции. Оно растет пропорционально расстоянию от точки разрыва.

2 Постановка задачи

Рассмотрим контур C , гладкий за исключением точки O , где кривизна имеет скачок. Введем декартову систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой O , ось абсцисс касалась контура (см. рис. 1).

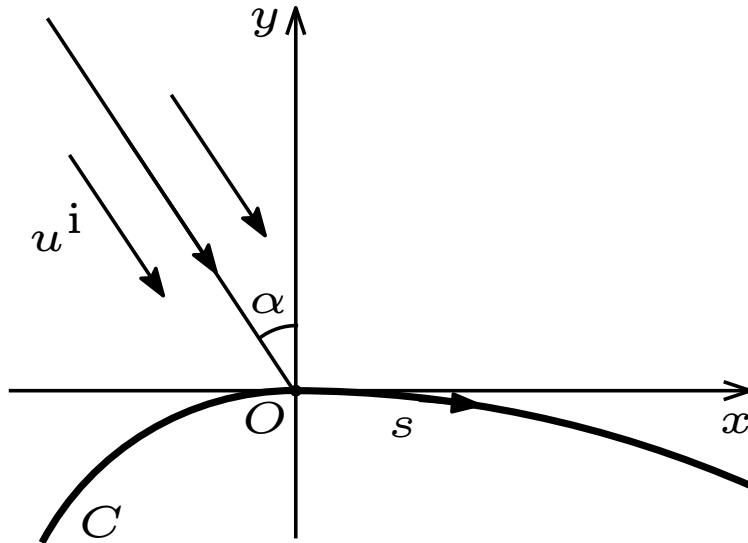


Рис. 1: Падающая волна

Положение точки на C будем задавать длиной дуги s , отсчитанной от точки O в положительном направлении оси абсцисс. При таком выборе параметризации кривизна контура в окрестности начала координат имеет вид

$$\varkappa(s) = \varkappa_0 + h\theta(s) + \dots, \quad (1)$$

где \varkappa_0 — значение гладкой составляющей кривизны в нуле, h — величина скачка, $\theta(s)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0; \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что кривизна (и скачок h в частности) может быть любого знака, ход рассуждений от этого не зависит.

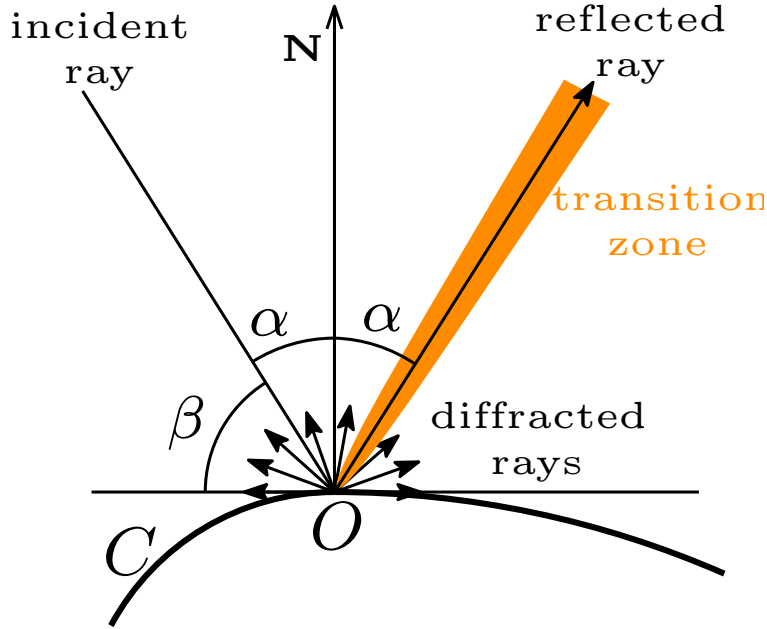


Рис. 2: Структура уходящей волны.

На C падает плоская волна, в выбранной декартовой системе координат выглядящая следующим образом

$$u^i = e^{ikP^-(x,y)}, \quad (3)$$

где

$$P^\pm(x, y) = x \sin \alpha \pm y \cos \alpha, \quad (4)$$

причем $\alpha < \pi/2 - \varepsilon, \varepsilon > 0$ (то есть падение не может быть даже близким к касатель-

ному). Обозначим угол скольжения β (см. рис. 2):

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (5)$$

Требуется найти уходящую волну при условии равенства суммарного поля нулю на конуре. Тем самым, необходимо решить уравнение Гельмгольца с нулевым граничным условием и условием излучения:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)(u^i + u^o) = 0, & (6a) \\ (u^i + u^o)|_C = 0, & (6b) \\ u^o \text{ описывает уходящую волну.} & (6c) \end{cases}$$

Уходящая волна¹ u^o (outgoing) вне переходной зоны (transition zone на рис. 2), отделяющей область, освещенную отраженной волной от области, где она отсутствует, в *высокочастотном* случае состоит из отраженной u^r и дифрагированной u^d волн:

$$u^o = u^r + u^d. \quad (7)$$

Поле u^r изменяется скачком при переходе через направление геометрического отражения и может быть найдено лучевым методом (см. [17]), а потому для нас не представляет интереса. В переходной зоне дифрагированную и отраженную волны не удастся явно разделить. Возникновение дифрагированной волны обусловлено главным образом негладкостью контура. Наша цель – найти u^d в первом приближении, а также описать поле в *переходной области*. Согласно [12], вне переходной области вдали от контура дифрагированная волна должна иметь вид

$$u^d = A(\phi, k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} (1 + o(1)), \quad k\rho \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где (ρ, ϕ) – полярные координаты:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad (9)$$

$A(\phi, k)$ – диаграмма направленности.

Внутри же переходной зоны вдали от контура, как мы предполагаем, поле представляет собой решение параболического уравнения.

¹Здесь и далее уходящая волна понимается в смысле принципа предельного поглощения. Этот вопрос будет подробнее затронут в разделе 4.

3 Постановка задачи в пограничном слое

3.1 Используемые системы координат

Положение точки M на плоскости будем задавать длиной n отрезка нормали, опущенной из M на контур C , и длиной дуги s от точки O до основания нормали (см. рис. 3). Если M находится выше контура, то $n > 0$. Эта система координат ортогональна (см. [18]).

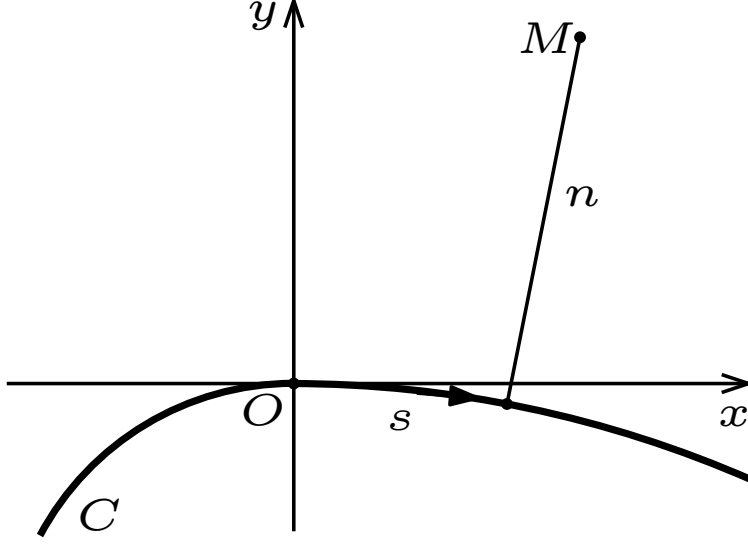


Рис. 3: Система координат

Если кривая задана в параметрическом виде $x = X(s)$ и $y = Y(s)$, то (см., например, [18]) декартовы координаты точки на плоскости выше контура C можно выразить следующим образом:

$$x = X(s) - n \sin \psi, \quad y = Y(s) + n \cos \psi, \quad (10)$$

где ψ — угол между касательной к кривой C и положительным направлением оси x . Очевидно:

$$\cos \psi = \frac{dX(s)}{ds}, \quad \sin \psi = \frac{dY(s)}{ds}. \quad (11)$$

Для кривизны контура справедливо выражение

$$\kappa(s) = -\frac{d\psi(s)}{ds}. \quad (12)$$

Учитывая, что при $s = 0$ угол ψ принимает значение 0, для малых s имеем

$$\psi(s) = -\int_0^s \kappa(s) ds = -\kappa_0 s - h s_+ + O(s^2). \quad (13)$$

Здесь использовано стандартное обозначение (см. [21])

$$s_+^\lambda = s^\lambda \theta(s), \quad s_+ := s_+^1.$$

Из соотношений (10) и (11) нетрудно получить выражения для декартовых координат через n и s :

$$\begin{cases} x = s + \varkappa_0 s n + h n s_+ + o(n^2 + s^2), \\ y = n - \frac{\varkappa_0 s^2}{2} - \frac{h s_+^2}{2} + o(n^2 + s^2). \end{cases} \quad (14)$$

Введем также локальную полярную систему координат r и φ

$$n = r \sin \varphi, \quad s = r \cos \varphi, \quad (15)$$

причем $r > 0$, а $-\pi < \varphi < \pi$.

Следуя Келлеру, перейдем к растянутым координатам

$$S = k s, \quad N = k n. \quad (16)$$

Декартовы координаты можно представить в виде рядов по степеням k :

$$\begin{cases} x = \frac{S}{k} + \frac{\varkappa_0 S N}{k^2} + \frac{h N S_+}{k^2} + O\left(\frac{N^2 + S^2}{k^3}\right), \\ y = \frac{N}{k} - \frac{\varkappa_0 S^2}{2k^2} - \frac{h S_+^2}{2k^2} + O\left(\frac{N^2 + S^2}{k^3}\right). \end{cases} \quad (17)$$

3.2 Падающая волна в координатах N и S

Используя (17), получим выражение для фаз падающей и уходящей плоских волн:

$$\begin{aligned} kP^\pm(x, y) &= k(x \sin \alpha \pm y \cos \alpha) = \\ &= P^\pm(S, N) + \frac{\varkappa_0}{k} \left(N S \sin \alpha \mp \frac{S^2}{2} \cos \alpha \right) + \\ &+ \frac{h}{k} \left(N S_+ \sin \alpha \mp \frac{S_+^2}{2} \cos \alpha \right) + O\left(\frac{S^2 + N^2}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что

$$P^\pm(S, N) = kP^\pm(s, n). \quad (19)$$

Представим падающую волну в виде ряда по отрицательным степеням большого параметра:

$$u^i = e^{ikP^-(x, y)} = u_0^i + \varkappa_0 \frac{u_1^i}{k} + h \frac{u_1^h}{k} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} u_0^i &= e^{iP^-(S,N)}, \\ u_1^i &= i \left(\frac{S^2}{2} \cos \alpha + NS \sin \alpha \right) e^{iP^-(S,N)}, \\ u_1^{ih} &= i \left(\frac{\cos \alpha}{2} S_+^2 + NS_+ \sin \alpha \right) e^{iP^-(S,N)}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.3 Разложение оператора Гельмгольца в ряд по степеням большого параметра

Оператор Лапласа в координатах n и s имеет вид (см. [18]):

$$\Delta = \frac{1}{1+n\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1+n\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{1+n\kappa} \frac{\partial}{\partial n} \left((1+n\kappa) \frac{\partial}{\partial n} \right), \quad (22)$$

а в растянутых координатах N и S

$$\Delta + k^2 = k^2 \left(L_0 + \frac{\varkappa_0}{k} L_1 + \frac{h}{k} L_1^h + \dots \right), \quad k \rightarrow \infty \quad (23)$$

где введены следующие обозначения для дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial^2}{\partial N^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} + 1; & L_1 &= -2N \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial}{\partial N}; \\ L_1^h &= -2N\theta(S) \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \theta(S) \frac{\partial}{\partial N} - N\delta(S) \frac{\partial}{\partial S}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда (2), $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

3.4 Постановка задачи в координатах N и S

Уходящую волну естественно искать в виде формального ряда, подобного ряду для падающей волны:

$$u^\circ = u_0^\circ + \varkappa_0 \frac{u_1^\circ}{k} + h \frac{u_1^{\circ h}}{k} + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (6а) получаем

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)(u^i + u^\circ) &= k^2 L_0(u_0^i + u_0^\circ) + \\ &+ k \varkappa_0 \left(L_0(u_1^i + u_1^\circ) + L_1(u_0^i + u_0^\circ) \right) + \\ &+ kh \left(L_0(u_1^{ih} + u_1^{\circ h}) + L_1^h(u_0^i + u_0^\circ) \right) + \dots, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференциальные операторы определены в (24). Из (6b) получим граничные условия для членов ряда

$$\begin{aligned} u_0^o|_{N=0} &= -u_0^i|_{N=0}; \\ u_1^o|_{N=0} &= -u_1^i|_{N=0}; \\ u_1^{oh}|_{N=0} &= -u_1^{ih}|_{N=0}. \end{aligned} \quad (27)$$

4 Построение u_1^{oh}

Уходящая волна состоит из геометрически отраженной и дифрагированной волн. В этой работе нас интересует дифрагированная волна, возникновение которой связано в основном с наличием скачка кривизны. Чтобы найти ее в первом приближении, достаточно построить линейный по h член уходящей волны, то есть u_1^{oh} . Задача для нее, как следует из (26) и (27), имеет вид (везде далее мы ищем только уходящую волну ²)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) u_1^{oh} = ((i \cos \alpha + 2N \sin^2 \alpha) \theta(S) - iN \delta(S) \sin \alpha) e^{iP^+(S,N)}, \\ u_1^{oh}|_{N=0} = -\frac{i \cos \alpha}{2} S_+^2 e^{iS \sin \alpha}. \end{cases} \quad (28a)$$

$$(28b)$$

Представим u_1^{oh} в виде суммы

$$u_1^{oh} = w + v, \quad (29)$$

где w решает неоднородное уравнение с неоднородным граничным условием

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) w = ((i \cos \alpha + 2N \sin^2 \alpha) \theta(S) - iN \delta(S) \sin \alpha) e^{iP^+(S,N)}, \\ w|_{N=0} = \frac{i \cos \alpha}{2} S_+^2 e^{iS \sin \alpha}, \end{cases} \quad (30a)$$

$$(30b)$$

а v – однородное уравнение с неоднородными граничными условиями

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 \right) v = 0, \end{cases} \quad (31a)$$

$$\begin{cases} v|_{N=0} = -i \cos \alpha S_+^2 e^{iS \sin \alpha}. \end{cases} \quad (31b)$$

Заметим, что решение этих задач будет единственно, если существует.

²Если в операторе L_0 (см. (24)) заменить 1 на $1+i\epsilon$, $\epsilon > 0$, то задачи (26) с граничными условиями (27) будут иметь единственное затухающее на бесконечности решение. Решения задач (26) могут быть получены предельным переходом $\epsilon \rightarrow 0$ (см. [20]).

4.1 Построение w

Построим решение задачи (30). Нетрудно получить следующее выражение для w :

$$w = i \left(S_+^2 \frac{\cos \alpha}{2} - N S_+ \sin \alpha \right) e^{iP^+(S,N)}. \quad (32)$$

Отраженная волна в грубом приближении является плоской волной $-e^{ikP^+(x,y)}$. В координатах N и S в пограничном слое она имеет вид

$$\begin{aligned} -e^{ikP^+(x,y)} = & \left[-1 + i \frac{\mathcal{K}_0}{k} \left(S_+^2 \frac{\cos \alpha}{2} - N S_+ \sin \alpha \right) + \right. \\ & \left. + i \frac{h}{k} \left(S_+^2 \frac{\cos \alpha}{2} - N S_+ \sin \alpha \right) + \dots \right] e^{iP^+(S,N)}, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (33)$$

Видно, что w совпадает с линейным по h членом разложения (33). Оно не представляет для нас интереса, поскольку описывает геометрически отраженную волну.

4.2 Построение v

Построим решение задачи (31). Будем искать его в виде преобразования Фурье

$$v(S, N) = \frac{1}{2\pi} \int \mu(\sigma, N) e^{i\sigma S} d\sigma, \quad (34)$$

которое потом будет регуляризовано. Неизвестная плотность $\mu(\sigma, N)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial N^2} + 1 - \sigma^2 \right) \mu = 0, \quad (35a)$$

и, как следует из [21], граничному условию

$$\mu|_{N=0} = 2 \cos \alpha \frac{1}{(\sigma - \sin \alpha - i0)^3}. \quad (35b)$$

Задача (35) имеет два линейно независимых решения:

$$\mu = 2 \cos \alpha e^{\pm iN\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{1}{(\sigma - \sin \alpha - i0)^3}. \quad (36)$$

Ветвь корня выбираем так, чтобы при $\sigma \in (-1; 1)$ он был положительным.

Регуляризуем преобразование Фурье следующим образом: возьмем контур интегрирования как показано на рисунке 4 ($\Re \sigma$ — вещественная часть σ), а плотность $\mu = 2 \cos \alpha e^{iN\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{1}{(\sigma - \sin \alpha - i0)^3} = 2 \sin \beta e^{iN\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{1}{(\sigma - \cos \beta - i0)^3}$. При таком выборе оказывается, что v описывает уходящую волну.

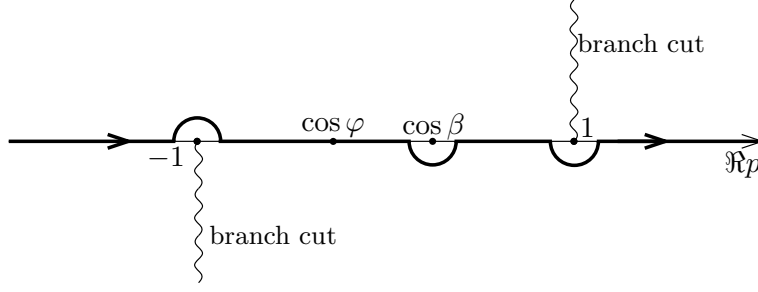


Рис. 4: Контур интегрирования в (37).

В результате (34) принимает вид:

$$v = \frac{\sin \beta}{\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{ik(n\sqrt{1-\sigma^2}+s\sigma)}}{(\sigma - \cos \beta)^3} d\sigma. \quad (37)$$

При $k \rightarrow \infty$ это интеграл от быстро осциллирующей функции. Вклад в такие интегралы вносят сингулярности подынтегральной функции и критические точки фазы (см., например, [23]). В нашем случае единственной критической является точка $s/\sqrt{n^2 + s^2} = \cos \varphi$.

4.2.1 Случай, когда полюс и критическая точка фазы далеки

Рассмотрим ситуацию, когда критическая точка находится достаточно далеко от полюса, и асимптотика (37) находится стандартным методом перевала.

Деформируем контур интегрирования на рис. 4 так, чтобы в критической точке он касался линии наибыстрейшего спуска (см. [22]). Линия наибыстрейшего спуска в малой окрестности критической точки $\cos \varphi$ близка к прямой, идущей под углом $3\pi/4$ к положительному направлению оси абсцисс. В случаях $\cos \beta > \cos \varphi$ и $\cos \beta < \cos \varphi$ получим контуры, изображенные на рис. 5 и рис. 6 соответственно:

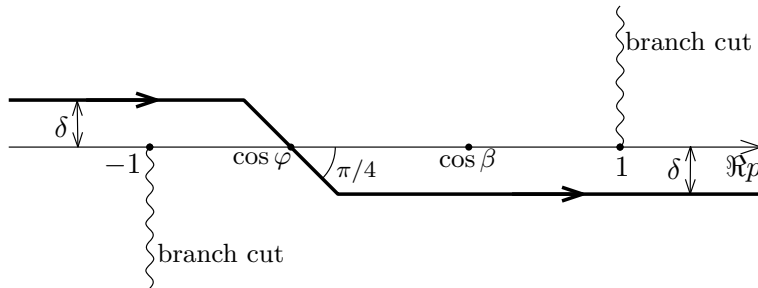


Рис. 5: Контур интегрирования в (37) при $\cos \beta > \cos \varphi$.

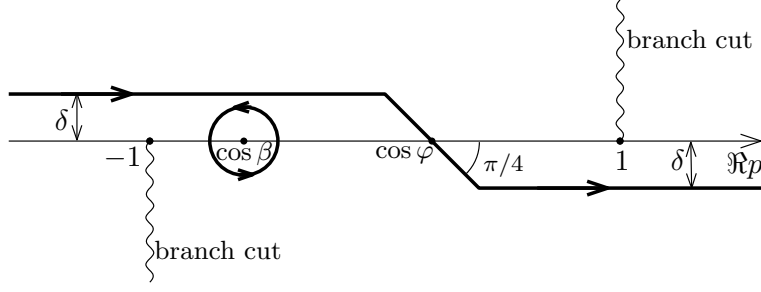


Рис. 6: Контур интегрирования в (37) при $\cos \beta < \cos \varphi$.

Из рисунков видно, что полюс вносит вклад в интеграл только при $\cos \varphi > \cos \beta$. С учетом этого, вычисляя вклады от критической точки фазы и полюса, для v получим асимптотику

$$v = \left(\frac{kn}{\sin^2 \beta} - i \frac{k^2}{\sin \beta} (s \sin \beta - n \cos \beta)^2 \right) \theta(\beta - \varphi) e^{ikP^+(s,n)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \frac{\sin \varphi \sin \beta}{(\cos \varphi - \cos \beta)^3} \left[1 + O \left(\frac{1}{kr(\cos \varphi - \cos \beta)^2} \right) \right], \quad kr \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Член с амплитудой, полиномиально растущей при $n, s \rightarrow \infty$, является поправкой к отраженной волне (отличной от нуля только правее направления геометрического отражения). Второе слагаемое – старший член асимптотики дифрагированной цилиндрической волны, нахождение которого было нашей целью. Относительная погрешность мала при таких φ , что

$$\sqrt{kr} |\beta - \varphi| \gg 1. \quad (39)$$

Говоря, что критическая точка фазы и полюс далеки, мы имеем в виду именно выполнение соотношения (39).

4.2.2 Сшивка вне переходной зоны

Согласно (38) и (25), вне переходной области вблизи контура дифрагированная волна имеет асимптотику

$$u^d = A(\varphi, k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 + o(1)), \quad kr \rightarrow \infty, \quad (40)$$

где

$$A(\varphi, k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h e^{-i\pi/4}}{k} \frac{\sin \varphi \sin \beta}{(\cos \varphi - \cos \beta)^3}. \quad (41)$$

Пользуясь правилами перехода между разными системами координат (9), (17), (15), нетрудно показать, что

$$A(\phi, k) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} = A(\varphi, k) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 + O(kr^2)). \quad (42)$$

Из этого следует, что, как и предполагалось в (8), вдали от контура вне переходной зоны дифрагированная волна представляет собой цилиндрическую волну с диаграммой направленности

$$A(\phi, k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{he^{-i\pi/4}}{k} \frac{\sin \phi \sin \beta}{(\cos \phi - \cos \beta)^3}. \quad (43)$$

4.2.3 Случай, когда полюс и критическая точка фазы близки

Обратимся теперь к случаю, когда (39) не выполняется и нахождение асимптотики (37) требует модификации метода перевала.

Рассмотрим малую окрестность критической точки фазы, содержащую также и полюс. Введем переменную интегрирования $\sigma = \cos \varphi + t \sin \varphi$, где $|t| \ll 1$. Следуя идеологии, изложенной, например, в [23], разложим фазовую функцию до квадратичных членов, а затем положим пределы интегрирования бесконечными. Можно показать, что при выполнении соотношения

$$(kr)^{1/3} |\beta - \varphi| \ll 1 \quad (44)$$

подынтегральная функция в (37) допускает приближение

$$\frac{e^{ik(n\sqrt{1-\sigma^2}+s\sigma)}}{(\sigma - \cos \beta)^3} \approx e^{ikr} \frac{\exp\left(-\frac{ikr}{2} t^2\right)}{(t - (\varphi - \beta))^3 \sin^3 \varphi}, \quad (45)$$

а само (37) оценивается следующим образом:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{ik(n\sqrt{1-\sigma^2}+s\sigma)}}{(\sigma - \cos \beta)^3} d\sigma = \frac{e^{ikr}}{\sin^2 \varphi} \int_{\gamma'} \frac{\exp\left(-\frac{ikr}{2} t^2\right)}{(t - (\varphi - \beta))^3} dt \cdot (1 + o(1)) + O(\sqrt{kr}), \quad (46)$$

где новый контур интегрирования γ' показан на рисунке 7. Тем самым, (44) формализует понятие близости критической точки фазы и полюса.

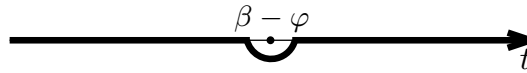


Рис. 7: Контур интегрирования в (46).

Последний интеграл допускает представление

$$\int_{\gamma'} \frac{\exp\left(-\frac{ikr}{2} t^2\right)}{(t - (\varphi - \beta))^3} dt = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{d\beta^2}, \quad (47)$$

где введено обозначение

$$I = \int_{\gamma'} \frac{\exp\left(-\frac{ikr}{2} t^2\right)}{t - (\varphi - \beta)} dt. \quad (48)$$

Интеграл I (условно сходящийся на бесконечности) выражается через интеграл Френеля (см. [2])

$$\Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{i\xi^2} d\xi \quad (49)$$

следующим образом

$$I = 2\pi i e^{-iz^2} (1 - \Phi(z)), \quad (50)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{kr}{2}} (\varphi - \beta). \quad (51)$$

Видно, что вторая производная от I по β имеет порядок kr . В результате (37) принимает вид

$$v = \frac{ikr}{2 \sin \beta} e^{ikr} \frac{d^2}{dz^2} \left[(1 - \Phi(z)) e^{-iz^2} \right] (1 + o(1)). \quad (52)$$

Также можно выразить v через функцию параболического цилиндра (см. [24]):

$$v = \frac{kre^{-i\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{\pi} \sin \beta} D_{-3}(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}z). \quad (53)$$

Нетрудно показать, что в области, где одновременно выполняются соотношения (39) и (44), выражения (38) и (52) совпадают в главном порядке (см. приложение (А)).

4.3 Поле в переходной зоне

Перейдем в прямоугольную систему координат (x', y') , где ось y' направлена вдоль геометрически отраженного луча, а ось x' перпендикулярна ему (см. рис. 8).

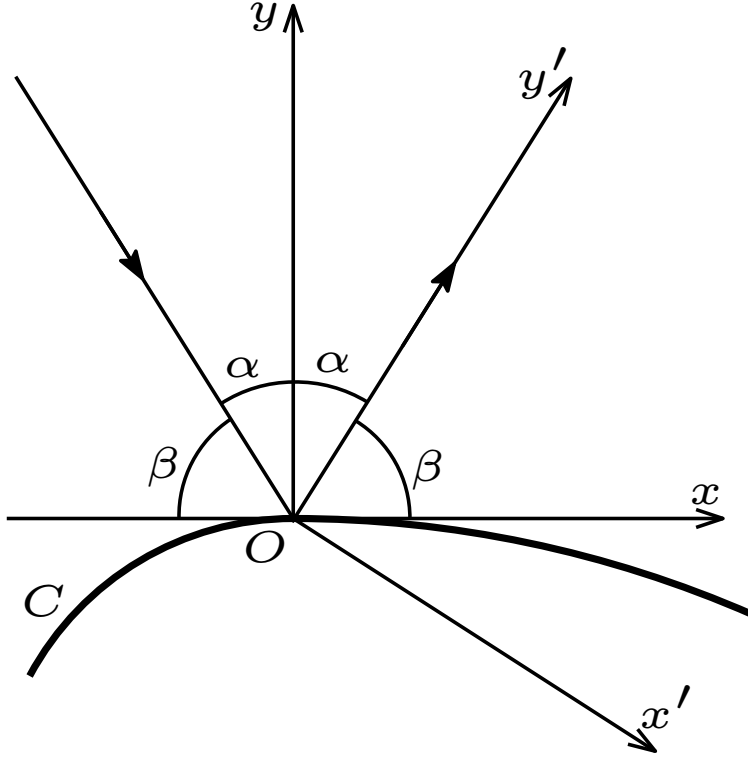


Рис. 8: Система координат

Нам представляется удобным работать в параболических координатах (ξ, η)

$$x' = \xi\eta, \quad y' = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}. \quad (54)$$

Уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 (\xi^2 + \eta^2) \right) \mathfrak{U}(\xi, \eta) = 0. \quad (55)$$

Из (54) ясно, что

$$\rho = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}. \quad (56)$$

Поле вблизи направления отражения естественно искать в виде

$$\mathfrak{U}(\xi, \eta) = e^{ik\rho} \psi(\xi, \eta). \quad (57)$$

Справедливо следующее утверждение. Пусть $\psi(\eta)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2ik \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + 2ik \right) \psi = 0. \quad (58)$$

Тогда выражение

$$\mathcal{U}(\xi, \eta) = \xi^2 \frac{d^2}{d\eta^2} \psi(\eta) \quad (59)$$

тоже является решением параболического уравнения (58).

Покажем это. Обозначим $H(\eta) = \psi''(\eta)$. Поскольку ψ удовлетворяет уравнению (58), то H удовлетворяет уравнению

$$H'' + 2ik\eta H' + 6ikH = 0. \quad (60)$$

Подставляя $\xi^2 H(\eta)$ в (58), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2ik \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + 2ik \right) \xi^2 H(\eta) = \xi^2 (H'' + 2ik\eta H' + 6ikH) = 0. \quad (61)$$

Тем самым, утверждение доказано.

4.4 Сшивка в переходной зоне

Нетрудно проверить, что $\psi(\eta) = (1 - \Phi(\sqrt{k}\eta)) e^{-ik\eta^2}$ является решением параболического уравнения (58). Тогда, по доказанному выше,

$$\mathcal{U}(\xi, \eta) = \frac{i\xi^2}{4 \sin \beta} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(1 - \Phi(-\sqrt{k}\eta) \right) e^{-ik\eta^2} \quad (62)$$

является решением параболического уравнения (58).

Покажем, что выражение для дифрагированной волны (52) сшивается с точным решением параболического уравнения (62). В переходной зоне

$$\frac{\xi^2}{2} = r \left(1 + O((|\mathbf{x}_0| + |h|)r) + O((\beta - \varphi)^2) \right), \quad \eta = -\frac{z}{\sqrt{k}} \left(1 + O((|\mathbf{x}_0| + |h|)r) + O((\beta - \varphi)^2) \right), \quad (63)$$

где z введено в (51). Поэтому (52) сшивается с (62)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\xi, \eta) &= \frac{i\xi^2}{4 \sin \beta} \frac{d^2}{d\eta^2} \left[\left(1 - \Phi(\sqrt{k}\eta) \right) e^{-ik\eta^2} \right] = \\ &= \frac{ir}{2 \sin \beta} \frac{d^2}{dz^2} [1 - \Phi(z)] e^{-iz^2} \left(1 + O((|\mathbf{x}_0| + |h|)r) + O((\beta - \varphi)^2) \right) = \\ &= \frac{v}{k} \left(1 + O((|\mathbf{x}_0| + |h|)r) + O((\beta - \varphi)^2) \right). \end{aligned} \quad (64)$$

5 Заключение

Мы изучили асимптотическое поведение дифрагированной волны при $kr \rightarrow \infty$ по всем направлениям рассеяния.

Развитая техника переносится на задачи с разрывом кривизны более высоких порядков, а также на случай гельдеровской кривизны.

А

Нами получены асимптотики для линейного по h члена v (31) в случае близости критической точки фазы и полюса и в случае, когда они далеки. В области, где выполнено и условие (39), и условие (44), выражения (38) и (52) должны совпадать в главном порядке. Произведем подробно вычисление (52). Подставив асимптотику интеграла Френеля

$$\Phi(z) = \theta(z) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{i}{z} + \frac{1}{2z^3} - \frac{3i}{4z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right) e^{iz^2 - i\pi/4}, \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (65)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(\theta(-z)e^{-iz^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{i}{z} + \frac{1}{2z^3} - \frac{3i}{4z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right) e^{-i\pi/4} \right) = \\ = - (4z^2 + 2i) \theta(-z)e^{-iz^2} - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{i}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right). \end{aligned} \quad (66)$$

В результате (52) при $z \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} v = \frac{kr}{\sin \beta} (1 - ikr(\beta - \varphi)^2) \theta(\beta - \varphi) e^{ikr(1 - \frac{1}{2}(\beta - \varphi)^2)} (1 + O(\beta - \varphi)) + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikr - i\pi/4}}{\sqrt{kr}} \frac{1}{(\beta - \varphi)^3 \sin \beta} (1 + o(1)), \quad kr \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (67)$$

что совпадает в главном порядке с (38). Первое слагаемое в (67) соответствует отраженной волне, а второе – дифрагированной.

Список литературы

- [1] J. B. Keller, Geometrical theory of diffraction, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 116–130 (1962).
- [2] В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции*, «Связь», Москва (1978).
- [3] М. А. Леонтович, Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли, *Изв. АН СССР. Сер. Физ.*, **8**(1), 16–22 (1944).
- [4] М. А. Леонтович, В. А. Фок, Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения, *ЖЭТФ*, **16**(7), 557–573 (1946).
- [5] В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, «Советское радио», Москва (1970).
- [6] A. Popov, A. Ladyzhensky, S. Khozioski, Uniform Asymptotics of the Wave Diffracted by a Cone of Arbitrary Cross Section, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **16**, 296–299 (2009).
- [7] А. В. Попов, Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны, *Труды V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн*, 171–175 (1971).
- [8] Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Дифракция волны шепчущей галереи вблизи линии разрыва кривизны, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **239**, 95–109 (1997).
- [9] N. Ya. Kirpichnikova, V. B. Philippov, Diffraction of creeping waves by a jump of curvature of a boundary of a conducting body, *Proceedings of the Day of Diffraction '97*, 53–58 (1997).
- [10] Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, А. С. Кирпичникова, Дифракция волн соскальзывания от линии скачка кривизны. (Акустическая трехмерная среда), *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **257**, 5–92 (1999).
- [11] Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов, Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **230**, 86–102 (1995).
- [12] L. Kaminetzky, J. B. Keller, Diffraction coefficients for hier order edges and vertices, *SIAM J. Appl. Math.*, **22**, 109–134 (1972).
- [13] А. Ф. Филиппов, Отражение от границы, состоящей из дуг различной кривизны, *Прикладная математика и механика*, **34**, 1076–1084 (1971).
- [14] Z. M. Rogoff, A. P. Kiselev, Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary, *Wave Motion*, **33**, 183–208 (2001).

- [15] R. N. Buchal, J. B. Keller, Boundary layer problems in diffraction theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**, 85–114 (1960).
- [16] В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, «Издательство ЛГУ», Ленинград (1974).
- [17] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, «Наука», Москва (1972).
- [18] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, **2**, «Наука», Москва (1974).
- [19] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, **3**(2), «Наука», Москва (1974).
- [20] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, «Издательство МГУ», Москва (1999).
- [21] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, «Государственное издательство физико-математической литературы», Москва (1959).
- [22] М. В. Федорюк, *Асимптотика: Интегралы и ряды*, «Наука», Москва (1987).
- [23] А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, «Государственное издательство физико-математической литературы», Москва (1962).
- [24] В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда – Малюжинца в теории дифракции*, «Издательство СПбГУ», Санкт-Петербург (2004).